Prsten, tijelo i polje

<u>Definicija</u> Uređenu trojku $(P,*,\circ)$ nepraznog skupa P i dvije binarne operacije $*$, $\circ$ definisane u P nazivamo prsten akko vrijedi

a) $(P,*)$ je Abelova grupa;

b) $(P,\circ)$ je polugrupa;

c) Operacija $\circ$ je distributivna u odnosu na operaciju $*$ tj. vrijedi $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ i $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$ za $\forall x,y,z\in P$.

Napomenimo da se u prstenu $(P,*,\circ)$ prva operacija $*$ često označava simbolom $+$ i naziva sabiranje u prstenu, a druga operacija $\circ$ se često označava sa $\cdot$ i naziva množenje u prstenu. U tom slučaju pišemo $(P,+,\cdot)$ umjesto $(P,*,\circ)$; Neutralni element Abelove grupe $(P,+)$ označavamo sa 0 i nazivamo nula prstena, a neutralni element (ako ga ima!) polugrupe $(P,\cdot)$ označavamo sa 1 i nazivamo jedinica prstena $(P,+,\cdot)$.

<u>Definicija</u> Prsten $(P,+,\cdot)$ sa jedinicom $e\neq 0$ nazivamo tijelo akko je $(P\setminus\{0\},\cdot)$ grupa.

Komutativno tijelo nazivamo polje.

Provjeriti da u prstenu $(P,+,\cdot)$ važi
$$(\forall x,y\in P)\quad -(x+y)=(-x)+(-y)=-x-y.$$

Rj. Posjetimo se $(P,+,\cdot)$ je prsten akko važi

a) $(P,+)$ Abelova grupa

b) $(P,\cdot)$ polugrupa

c) $\forall(x,y,z\in P)\quad x\cdot(y+z)=xy+xz$ i $(x+y)\cdot z=xz+yz$.

$-(x+y)$ je isti zapis kao $(-1)(x+y)$

Iz osobine c) prstena $(-1)(x+y)=(-1)\cdot x+(-1)\cdot y=-x+(-y)$

Sad imamo
$$-(x+y)=(-1)(x+y)=(-1)x+(-1)y=-x+(-y)=-x-y$$
q.e.d.

Dokazati da u prstenu važe zakoni

a) $x\cdot 0=0\cdot x=0$, gdje je 0 neutralni element za operaciju $+$;

b) $-(x\cdot y)=(-x)\cdot y=x\cdot(-y)$;

c) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$

Rj. a) $x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$
$$x\cdot 0=x\cdot 0+x\cdot 0$$
$$0=x\cdot 0 \text{ q.e.d.}$$
Analogno za $0\cdot x$ (URADITI ZA VJEŽBU).

b) Pokažimo jednakost $(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$.
$$x\cdot y+(-x)\cdot y=(x+(-x))y=0\cdot y=0$$
$$x\cdot y+(-x)\cdot y=0$$
$$-(x\cdot y)=(-x)\cdot y \text{ q.e.d.}$$
Dokaz druge jednakosti je sličan. (ZA VJEŽBU)

c) Na osnovu b) je
$$(-x)\cdot(-y)=-(x\cdot(-y))=-(-(x\cdot y))=x\cdot y \text{ q.e.d.}$$

Neka je $(P,+,\cdot)$ algebarska struktura koja zadovoljava sve aksiome prstena izuzev komutativnosti sabiranja. Ako P ima desnu jedinicu, dokazati da je $(P,+,\cdot)$ prsten.

Rj. Iz postavke zadatka imamo sljedeće:

a) $(P,+)$ je grupa

b) $(P,\cdot)$ je polugrupa i

P ima desnu jedinicu tj. $\forall(x\in P)\ x\cdot 1 = x$.

c) $\forall(x,y,z\in P)\quad x\cdot(y+z)=xy+xz \quad i \quad (x+y)\cdot z = xz+yz$

Šta trebamo dokazati?

Trebamo pokazati da je $(P,+,\cdot)$ prsten tj. da je operacija $+$ komutativna. Drugim riječima $\forall(a,b\in P)\ a+b=b+a$.

$\forall(a,b\in P)\quad b\cdot 1 = b$. Na osnovu prethodnog zadatka

$$-(b\cdot 1) = (-b)\cdot 1 = b\cdot(-1).$$

Pokažimo da $a+b = -((b+a)(-1))$

$$0 = (-b)+(-a)+a+b = b(-1)+a(-1)+a+b = (b+a)(-1)+a+b$$

$$\Rightarrow \quad a+b = -((b+a)(-1)) \quad \ldots(1)$$

Pokažimo da je $b+a = -((b+a)(-1))$

$$0 = (-b)+(-a)+b+a = b(-1)+a(-1)+b+a = (b+a)(-1)+b+a$$

$$\Rightarrow \quad b+a = -((b+a)(-1)) \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $a+b=b+a$ tj važi komutativnost operacije $+$

$(P,+,\cdot)$ jest prsten

Neka su $a\oplus b = a+b-1$ i $a\circledast b = \frac{-ab}{2}$ binarne operacije na skupu $\mathbb{R}$. Ispitati da li $(\mathbb{R},\oplus,\circledast)$ ima strukturu prstena.

Rj. $(\mathbb{R},\oplus,\circledast)$ je prsten akko je

a) $(\mathbb{R},\oplus)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{R},\circledast)$ polugrupa

c) važe dva zakona distribucije $a\circledast(b\oplus c) = (a\circledast b)\oplus(a\circledast c)$

i $(a\oplus b)\circledast c = (a\circledast c)\oplus(b\circledast c)$

a) Provjerimo da li je $(\mathbb{R},\oplus)$ Abelova grupa.

zatvorenost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\oplus b\in\mathbb{R}$

$a\oplus b = a+b-1 \in\mathbb{R}$ operacija $\oplus$ jest zatvorena

asocijativnost $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad (a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$

$$\left.\begin{array}{l}(a\oplus b)\oplus c = (a\oplus b)+c-1 = (a+b-1)+c-1 = a+b+c-2\\ a\oplus(b\oplus c) = a+(b\oplus c)-1 = a+(b+c-1)-1 = a+b+c-2\end{array}\right\}\text{ operacija } \oplus \text{ jest asocijativna}$$

neutralni element $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists e\in\mathbb{R}\quad a\oplus e = e\oplus a = a$

$$\left.\begin{array}{l}a\oplus e = a+e-1\\ e\oplus a = e+a-1\end{array}\right\}\text{ Da bi dobili } a\oplus e = a \text{ e mora biti } 1$$

1 je neutralni element

inverzni element $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists a^{-1}\in\mathbb{R}\quad a\oplus a^{-1} = a^{-1}\oplus a = 1$

$a\oplus a^{-1} = 1 \Rightarrow a+a^{-1}-1 = 1$

$a^{-1} = 2-a$

inverzni element je $2-a$

$a\oplus(2-a) = a+(2-a)-1 = 1$

$(2-a)\oplus a = 2-a+a-1 = 1$

komutativnost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\oplus b = b\oplus a$

$$\left.\begin{array}{l}a\oplus b = a+b-1\\ b\oplus a = b+a-1\end{array}\right\}\text{ operacija } \oplus \text{ jest komutativna}$$

$(\mathbb{R},\oplus)$ jest Abelova grupa

b) Provjerimo da li je $(\mathbb{R},\circledast)$ polugrupa.

zatvorenost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\circledast b\in\mathbb{R}$

$a\circledast b = -\frac{ab}{2}\in\mathbb{R}$ operacija $\circledast$ jest zatvorena

asocijativnost $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad (a\circledast b)\circledast c = a\circledast(b\circledast c)$

$$(a\circledast b)\circledast c = -\frac{(a\circledast b)\cdot c}{2} = -\frac{-\frac{ab}{2}\cdot c}{2} = \frac{abc}{4} \quad \ldots(1)$$

$$a \circledast (b \circledast c) = -\frac{a(b \circledast c)}{2} = -\frac{a(-\frac{bc}{2})}{2} = \frac{abc}{4} \quad \ldots(2)$$

Iz (1) i (2) vidimo da je operacija $\circledast$ asocijativna

Prema tome $(R, \circledast)$ jest polugrupa.

c) Provjerimo da li važe dva zakona distribucije $\forall a,b,c \in R$

$$a \circledast (b \oplus c) = (a \circledast b) \oplus (a \circledast c)$$
$$(a \oplus b) \circledast c = (a \circledast b) \oplus (b \circledast c)$$

i)

$$a \circledast (b \oplus c) = -\frac{a(b \oplus c)}{2} = -\frac{a(b+c-1)}{2} = -\frac{ab+ac-a}{2}$$

$$(a \circledast b) \oplus (a \circledast c) = (a \circledast b) + (a \circledast c) - 1 = -\frac{ab}{2} + \left(-\frac{ac}{2}\right) - 1 = \frac{-ab-ac-2}{2} = -\frac{ab+ac-2}{2}$$

Operacija $\circledast$ nije distributivna u odnosu na operaciju $\oplus$

$(R, \oplus, \circledast)$ nema strukturu prstena.

(#) U skupu racionalnih brojeva Q definisane su operacije Δ (trokutić) i $\square$ (kvadratić) na sljedeći način $x \Delta y = x+y+1$, $x \square y = xy+x+y$. Dokazati da je $(Q, \Delta, \square)$ prsten.

Rj. Trebamo pokazati

a) da je (Q, Δ) Abelova grupa

b) da je $(Q, \square)$ polugrupa

c) da vrijedi $\forall x,y,z \in Q$ $\quad x \square (y \Delta z) = (x \square y) \Delta (x \square z)$

i $(x \Delta y) \square z = (x \square z) \Delta (y \square z)$

a) ZATVORENOST

$\forall (x,y \in Q) \Rightarrow x \Delta y = x+y+1 \in Q \Rightarrow x \Delta y \in Q$

operacija Δ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall (x,y,z \in Q) \quad (x \Delta y) \Delta z = (x+y+1) \Delta z = (x+y+1)+z+1 = x+(y+z+1)+1$$
$$= x \Delta (y+z+1) = x \Delta (y \Delta z)$$

operacija Δ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (x \in Q)\ \exists (e \in Q)$

$$x \Delta e = x$$
$$x + e + 1 = x$$
$$e + 1 = 0$$
$$e = -1$$

Neutralni element je -1.

$$(-1) \Delta x = -1 + x + 1 = x$$

INVERZNI ELEMENT

$\forall (x \in Q)\ \exists (x^* \in Q)$

$$x \Delta x^* = -1$$
$$x + x^* + 1 = -1$$
$$x^* = -x-2$$

Inverzni element elementa x je $-x-2$

$$(-x-2) \Delta x = $$
$$= -x-2+x+1 = -1$$

KOMUTATIVNOST

$\forall (x,y \in Q) \quad x \Delta y = x+y+1 = y+x+1 = y \Delta x$

operacija Δ je komutativna

(Q, Δ) jest Abelova grupa.

b) ZATVORENOST

$\forall (x,y \in \mathbb{Q}) \quad x \square y = xy + x + y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \square y \in \mathbb{Q}$ operacija $\square$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$\forall (x,y,z \in \mathbb{Q}) \quad (x \square y) \square z = (xy+x+y) \square z = (xy+x+y)z + xy+x+y+z =$

$= xyz + xz + yz + xy + x + y + z \quad \dots (1)$

$x \square (y \square z) = x \square (yz+y+z) = x(yz+y+z) + x + yz+y+z =$

$= xyz + xy + xz + yz + x + y + z \quad \dots (2)$

(1) i (2) $\Rightarrow (x \square y) \square z = x \square (y \square z)$ operacija $\square$ je asocijativna

$(\mathbb{Q}, \square)$ jest polugrupa

c) $x \square (y \triangle z) = x \square (y+z+1) = x(y+z+1) + x + y + z + 1 = xy + xz + 2x + y + z + 1 \quad \dots (I)$

$(x \square y) \triangle (x \square z) = (xy+x+y) \triangle (xz+x+z) = xy + xz + 2x + y + z + 1 \quad \dots (II)$

(I) i (II) $\Rightarrow x \square (y \triangle z) = (x \square y) \triangle (x \square z)$

$$\left.\begin{array}{l} (x \triangle y) \square z = (x+y+1) \square z = (x+y+1)z + x+y+1+z = xz+yz+x+y+2z+1 \\ (x \square z) \triangle (y \square z) = (xz+x+z) \triangle (yz+y+z) = xz + yz + x + y + 2z + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x \triangle y) \square z = (x \square z) \triangle (y \square z)$

vrijede dva zakona distribucije

Kako vrijedi a), b), c) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Uređena trojka $(\mathbb{Q}, \triangle, \square)$ jest prsten

q.e.d.

Ispitati da li $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ polje, gdje su operacije $+$ i $\cdot$ date sa

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$$
$$(x \cdot y) \cdot (u,v) = (xu - 2yv, xv + yu$$

Rj: Trebamo provjeriti da li je

a) $(\mathbb{R}^2, +)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{R}^2 \setminus e_+, \cdot)$ Abelova grupa (gdje je e_+ neutralni element operacije sabiranja) $(e_+ = (e_1, e_2))$

c) da važe dva zakona distributivnosti

a) ZATVORENOST

$\forall ((x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2) \quad (x,y)+(u,v) = (x+u, y+v) \in \mathbb{R}^2$ Operacija $+$ je zatvorena u $\mathbb{R}^2$

ASOCIJATIVNOST

$\forall ((x,y),(u,v),(s,t) \in \mathbb{R}^2) \quad ((x,y)+(u,v)) + (s,t) = (x+u, y+v) + (s,t) =$

$= ((x+u)+s, (y+v)+t) = (x+(u+s), y+(v+t)) = (x,y) + (u+s, v+t) =$

$= (x,y) + ((u,v)+(s,t)) \Rightarrow$ operacija $+$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; \exists (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) + (e_1, e_2) = (x,y)$

$(x + e_1, y + e_2) = (x,y)$

$(e_1, e_2) = (0,0)$

Neutralni element je $(0,0)$ za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

INVERZNI ELEMENT

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; \exists (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) + (x^*, y^*) = (0,0)$

$(x + x^*, y + y^*) = (0,0)$

$(x^*, y^*) = (-x, -y)$

Inverzni element elementa (x,y) je $(-x,-y)$.

KOMUTATIVNOST

$\forall ((x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2) \quad (x,y)+(u,v) = (x+u, y+v) = (u+x, v+y) = (u,v) + (x,y)$

Operacija $+$ je komutativna $\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$ je Abelova grupa.

b) Proverimo da li je $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ Abelova grupa.

ZATVORENOST

Da li je $\forall (x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $(x,y)\cdot(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. ?

Pretpostavimo da $(x,y)\cdot(u,v)=(xu-2yv,\ xv+yu)$ nije element $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Tada bi važilo

$$\begin{aligned} xu-2yv&=0 \quad /\cdot(-v)\\ xv+yu&=0 \quad /\cdot u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -xuv+2yv^2&=0\\ +\quad xuv+yu^2&=0 \end{aligned}$$

$2yv^2+yu^2=0 \Rightarrow y(2v^2+u^2)=0$

$\Rightarrow y=0$ ili $2v^2+u^2=0$

$$\begin{aligned} xu-2yv&=0 \quad /\cdot x\\ xv+yu&=0 \quad /\cdot 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2u-2xyv&=0\\ +\ 2xyv+2y^2u&=0 \end{aligned}$$

$x^2u+2y^2u=0$

$(x^2+2y^2)u=0$

$u=0$ ili $x^2+2y^2=0$

1° $y=0 \Rightarrow x=0$ ili $u=v=0$

\# što nije moguće

2° $2v^2+u^2=0 \Rightarrow u=v=0$

\# što je nemoguće zbog uslova $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Skup $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ je zatvoren u odnosu na operaciju $\cdot$.

ASOCIJATIVNOST

$\forall (x,y),(u,v),(s,t)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $((x,y)\cdot(u,v))\cdot(s,t)=(xu-2yv,\ xv+yu)\cdot(s,t)=$

$=((xu-2yv)\cdot s-2(xv+yu)\cdot t,\ (xu-2yv)\cdot t+(xv+yu)\cdot s)$

$=(xus-2yvs-2xvt-2yut,\ xut-2yvt+xvs+yus)$ ...(1)

$((x,y)\cdot((u,v)\cdot(s,t)))=$ ZA VJEŽBU ... $=(xus-2yvs-2xvt-2yut,\ xut-2yvt+xvs+yus)$ ...(2)

$(1)=(2) \Rightarrow$ struktura jest asocijativna.

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\ \exists (e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ $(x,y)\cdot(e_1,e_2)=(x,y) \Rightarrow (xe_1-2ye_2,\ xe_2+ye_1)=(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} xe_1-2ye_2&=x\\ xe_2+ye_1&=y \end{aligned}$$

$x(e_1-1)-2ye_2=0$

$x\cdot e_2+y(e_1-1)=0$

$\Rightarrow e_1=1$ i $e_2=0$. Prema tome jedinični element je $(1,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

INVERZNI ELEMENT

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ \exists (x^*,y^*)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $(x,y)\cdot(x^*,y^*)=(1,0)$

$(xx^*-2yy^*,\ xy^*+yx^*)=(1,0)$

$$\begin{aligned} xx^*-2yy^*&=1 \quad /\cdot x\\ xy^*+yx^*&=0 \quad /\cdot 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2x^*-2xyy^*&=x\\ +\ 2xyy^*+2y^2x^*&=0 \end{aligned}$$

$x^2x^*+2y^2x^*=x$

$(x^2+2y^2)x^*=x$

$x^*=\dfrac{x}{x^2+2y^2}$

slično (ZA VJEŽBU)

$y^*=\dfrac{-y}{x^2+2y^2}$

$(x^2+2y^2\neq 0) \to$ ZAŠTO?

Inverzni element elementa (x,y) je

$(x,y)^{-1}=(x^*,y^*)=\left(\dfrac{x}{x^2+2y^2},-\dfrac{y}{x^2+2y^2}\right)$

c) Operacija $\cdot$ distributivna je prema $+$ jer je

$(x,y)\cdot((u,v)+(s,t))=(x,y)\cdot(u+s,v+t)=(x(u+s)-2y(v+t),$

$x(v+t)+y(u+s))=(xu+xs-2yv-2t,\ xv+xt+yu+ys)=$

$=(xu-2yv,\ xv+yu)+(xs-2yt,\ xt+ys)=(x,y)\cdot(u,v)+(x,y)\cdot(s,t)$

a), b), c) $\Rightarrow$ Struktura $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ je polje

q.e.d.

Pokazati za vežbu da je

$((x,y)+(u,v))\cdot(s,t)=(x,y)\cdot(s,t)+(u,v)\cdot(s,t)$.

#) U skupu $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ date su operacije $+_5$ (sabiranje po modulu 5) i $\cdot_5$ (množenje po modulu 5). Dokazati da je struktura $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ polje.

$$\boxed{a +_5 b = c; \quad c = \begin{cases} a+b, & a+b<5 \\ a+b-5, & a+b\geq 5\end{cases}}$$

Rj: Trebamo pokazati da je

a) $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{Z}_5 \setminus e_+)$ Abelova grupa (gdje je e_+ neutralni element za operaciju $+_5$)

c) da je $\cdot_5$ distributivno u odnosu na $+_5$.

$$\boxed{a\cdot_5 b = c \text{ gdje je } a\cdot b = q\cdot 5 + c,\ 0\le c<5}$$

Kako je $\mathbb{Z}_5$ konačan skup to sabiranje i množenje po modulu 5 možemo predstaviti u obliku tabela

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

a) ZATVORENOST

$\forall(a,b\in \mathbb{Z}^+)\ a+_5 b = c \in \mathbb{Z}^5$ (vidimo iz tabele $+_5$)

ASOCIJATIVNOST

$\forall(a,b,c\in\mathbb{Z}^+)\ (a+_5 b)+_5 c = d +_5 c$ gdje je $d \overset{def}{=} \begin{cases} a+b, & a+b<5\\ a+b-5, & a+b\ge5\end{cases}$

$$\Rightarrow d+_5 c = \begin{cases} d+c, & d+c<5 \\ d+c-5, & d+c\ge 5\end{cases} = \begin{cases}(a+b)+c, & (a+b)+c<5\\ (a+b)+c-5, & 5\le(a+b)+c<10 \\ (a+b)+c-10, & 10\le (a+b)+c\end{cases} \quad \dots(*)$$

$a+_5(b+_5c) = a+_5 f$, gdje je $f \overset{def}{=} \begin{cases} b+c, & b+c<5\\ b+c-5, & b+c\ge5\end{cases}$

$$a+_5 f \overset{def.}{=} \begin{cases} a+f, & a+f<5\\ a+f-5, & a+f\ge5\end{cases} = \begin{cases} a+(b+c), & a+(b+c)<5\\ a+(b+c)-5, & 5\le a+(b+c)\\ a+(b+c)-10, & 10\le a+(b+c)\end{cases} \quad \dots(**)$$

Iz (*) i (**) $\Rightarrow$ Operacija $+_5$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(a\in\mathbb{Z}_5)\ \exists(e_+\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 e_+ = a$

$e_+ = 0$ (ovo možemo vidjeti iz definicije ili iz tabele)

Neutralni element za operaciju $+_5$ je 0.

INVERZNI ELEMENT

$\forall(a\in\mathbb{Z}_5)\ \exists(a^*\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 a^* = 0$

Iz tabele inverzni elementi su: za 0 0, za 1 4, za 2 3, za 3 2, za 4 1.

Svaki element ima inverzni element

KOMUTATIVNOST

$\forall(a,b\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 b = \begin{cases}a+b, & a+b<5\\ a+b-5, & a+b\ge5\end{cases} \dots(*)$, $\quad b+_5 a = \begin{cases} b+a, & b+a<5 \\ b+a-5, & b+a\ge5\end{cases} \dots(**)$

(*) i (**) $\Rightarrow a+_5 b = b+_5 a$

Prema tome $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ je Abelova grupa

b) Pokažimo da je $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}, \cdot_5)$ Abelova grupa

ZATVORENOST

Prema teoremi o djeljenju za broj $a\cdot b$ postoji jednoznačno određen broj q tako da je $a\cdot b = 5\cdot q + r$, $0\le r<5$

$\forall(a,b\in\quad)\ a\cdot b = r$ gdje je r dobijeno iz $a\cdot b = 5\cdot q + r$

$\Rightarrow r\in\mathbb{Z}_5 \Rightarrow a\cdot b\in\mathbb{Z}_5$ Operacija $\cdot_5$ je zatvorena.

ASOCIJATIVNOST, NEUTRALNI ELEMENT, INVERZNI ELEMENT i KOMUTATIVNOST za $\cdot_5$ uraditi <u>za vježbu</u>.

c) $\forall(a,b,c\in\mathbb{Z}_5)$

$a\cdot_5(b+_5c) = a\cdot_5 d, \dots(1)$ gdje je $d = \begin{cases} b+c, & b+c<5\\ b+c-5, & b+c\ge5\end{cases}$

$(a\cdot_5 b)+_5(a\cdot_5 c) = r_1 +_5 r_2, \dots(2)$ gdje je $r_1 = a\cdot b - 5q_1$, $r_2 = a\cdot c - 5q_2$, $0\le r_1<5$, $0\le r_2<5$

KAKO NAĆI VEZU IZMEĐU (1) i (2). POKUŠATI RIJEŠITI ZA VJEŽBU.

a), b), c) $\Rightarrow (\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ jest polje q.e.d.

Zadaci za vježbu

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

1. U skupu $\mathbb{Z}^2$ date su operacije $*$ i $\circ$ na sljedeći način:

$$(m,n) * (p,q) = (m+p,\ n+q)$$
$$(m,n) \circ (p,q) = (mp+nq,\ mq+np)$$

Dokazati da je $(\mathbb{Z}^2, *, \circ)$ prsten.

2. a) Dat je skup $S=\{1,-1,i,-i\}$. Ispitati da li su $(S,+)$ i $(S,\cdot)$ grupoidi.

b) Data su preslikavanja $f_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Ispitati koju algebarsku strukturu predstavlja par $(A,\circ)$ gdje je $A=\{f_1, f_2, f_3\}$ a „$\circ$" operacija kompozicije f-ja $((f\circ g)(x)=f(g(x)))$.

3. Binarne operacije $*$ i $\circ$ definisane su na skupu $\mathbb{R}^2$ sa: $(a,b)*(c,d)=(a+c,\ b+d)$ i $(a,b)\circ(c,d)=(ac,\ ad+bc)$

Dokazati da je $(\mathbb{R}^2, *, \circ)$ komutativni prsten sa jedinicom.

4. Dat je skup od 4 realne f-je $S=\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3(x)=-x,\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\}$ i u skupu S operacija $\circ$ slaganja f-ja. Da li je struktura $(S,\circ)$ grupa?

5. Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ na sljedeći način $x*y=xy+x+y$. Da li je struktura $(\mathbb{R},*)$ grupa? Ako nije, za koji element $a\in\mathbb{R}$ će struktura $(\mathbb{R}\setminus\{a\},*)$ biti grupa?

6. Dat je skup $S=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\}$ i u njemu operacija $*$ definisana sa $(a,b)*(c,d)=(ac,\ bc+c+d)$. Ispitati da li je struktura $(S,*)$ grupa.